# matemática aplicada

Prof. Rafael Camargo Ferraz

*Este material contém uma compilação de textos de diversos autores, tendo sido elaborado com o objetivo exclusivo de ser um apoio didático para o aluno em sala de aula.*

2015

# Conjuntos numéricos

Todo o estudo desta disciplina está baseado no conjunto dos números reais. As funções são definidas e assumem valores nesse conjunto. Nesta seção você vai revisar seus conhecimentos sobre os conjuntos numéricos e suas principais propriedades e axiomas.

## Conjunto dos números naturais

Os primeiros números conhecidos da humanidade são os chamados números naturais, que possuem a seguinte representação:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Outra representação usual é N* = {1, 2, 3, ...}. Neste caso o asterisco (*) simboliza a exclusão do zero.

## Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros, formado por números inteiros positivos e negativos, representado por:

$$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

## Conjunto dos números racionais

Já no tempo do Egito antigo começaram a surgir números que não eram inteiros. Geralmente os agrimensores usavam uma corda, como escala de medida. Assim, para medir o terreno verificavam quantas vezes a corda esticada cabia nos lados do terreno, mas muito raramente a medida era correta, ou seja, a corda não cabia um número inteiro de vezes nos lados e começaram a surgir as frações.

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$$

## Conjunto dos números irracionais

Existem números que não podem ser escritos na forma de com n≠0 e m, n ∈ Z. Estes números formam o conjunto dos números irracionais e vamos denotá-lo pela letra $\bar{Q}$.
São exemplos de números irracionais:

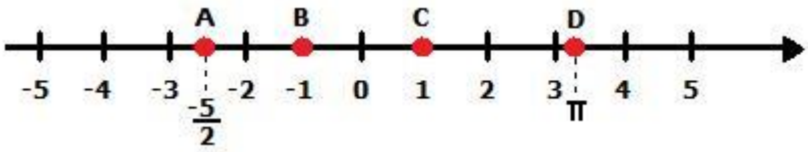
$$\pi=3{,}14159...,\ e=2{,}71...$$

## Conjunto dos números reais

As uniões do conjunto dos racionais com o conjunto dos irracionais formam o conjunto dos números reais.

$$R = Q \cup \bar{Q}$$

Os números reais são descritos geometricamente por uma reta numerada, denotada por reta real.




## Propriedades dos números reais

O conjunto dos números reais munido das operações de soma e multiplicação tem as seguintes propriedades ou axiomas:

Sejam *a, b* e *c* $\in$ R, então são válidas as seguintes propriedades:

| | |
|---|---|
| **P1 (Associativa para soma)**<br>$a + (b + c) = (a + b) + c$<br>**P2 (Existência de elemento neutro para a soma)**<br>$a + 0 = 0 + a = a$<br>**P3 (Existência de inverso para soma)**<br>$a + (-a) = (-a) + a = 0$<br>**P4 (Comutativa para soma)**<br>$a + b = b + a$<br>**P5 (Associativa para multiplicação)**<br>$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ | **P6 (Existência de elemento neutro para multiplicação)**<br>$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$<br>**P7 (Existência de inverso multiplicativo)**<br>$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1, a \neq 0$<br>**P8 (Comutatividade para multiplicação)**<br>$a \cdot b = b \cdot a$<br>**P9 (Distributividade)**<br>$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |

# OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

## 1 – Noções Primitivas

**Exemplo:** Considerando-se os conjuntos $A=\{ a , b , c \}$, $B =\{m , n \}$ e $C =\emptyset$ (*C* é o conjunto vazio), verifique a pertinência ou não dos elementos abaixo aos conjuntos.

a) a ........... A ;
b) n ........... A ;
c) h ........... C ;
d) m ........... B ;
e) c ........... C ;
f) b ........... B ;
g) c ........... A .

## 2 – Igualdade de conjuntos

***Definição:*** Dois conjuntos *A* e *B* são considerados iguais se, e somente se, todo elemento de *A* pertencer a *B* e vice-versa.

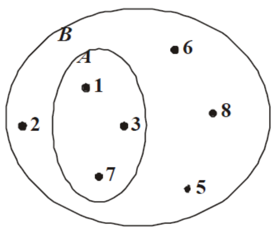
$$A= B \Leftrightarrow \forall\, x , ( x\in A \Leftrightarrow x\in B ).$$

**Exemplo:** Considerando-se os conjuntos *A*={*a* , *b* , *c* }, *B* ={*m* , *n* }, *C* = ∅, *D*={*b* , *c* , *a* }, *E* ={} e *F* ={ *n* ,*m* , *n* }, verifique a igualdade ou não dos conjuntos abaixo.

a) $D$ .......... $A$ ;
b) $B$ .......... $F$ ;
c) $D$ .......... $A$ ;
d) $A$ .......... $F$ ;
e) $C$ .......... $E$

## 3 - Subconjuntos

***Definição:*** Um conjunto *A* é subconjunto de outro conjunto *B* quando qualquer elemento de *A* também pertence a *B* .
Consideremos os conjuntos *A* e *B* , representados também por diagrama:
*A*={1,3,7}
*B* ={1,2,3,5,6,7,8}




Note que qualquer elemento de *A* também pertence a *B* . Nesse caso, dizemos que *A* é subconjunto de *B* .
Indica-se: $A \subset B$ ; lê-se: *A* está contido em *B* .
Podemos dizer também que *B* contém *A*. Indica-se: $B \supset A$; lê-se: *B* contém *A*.

## 4 - União de conjuntos

***Definição:*** A união de dois conjuntos *A* e *B* é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a *A* ou a *B* .
Designamos a união de *A* e *B* por: $A \cup B$ ; lê-se: *A* união *B* .

$$A \cup B = \{ \, x \, / \, x \in A \text{ ou } x \in B \, \}.$$

## 5 - Intersecção de conjuntos

***Definição:*** A intersecção de dois conjuntos, *A* e *B* , é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a *A* e a *B* , isto é, pelos elementos que pertencem a *A* e também pertencem a *B* .
Designamos a intersecção de *A* e *B* por: $A \cap B$ ; lê-se: $A$ inter $B$ .

$$A \cap B = \{ \, x \, / \, x \in A \text{ e } x \in B \, \}.$$

## 6- Diferença de conjuntos

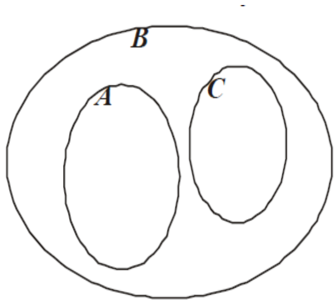
***Definição:*** A diferença de dois conjuntos *A* e *B* é o conjunto dos elementos que pertencem a *A*, mas que não pertencem a *B* .
Designamos a diferença de *A* e *B* por: *A*- *B* ; lê-se: *A* menos *B* .

$$A - B = \{ \, x \, / \, x \in A \text{ e } x \notin B \, \}.$$

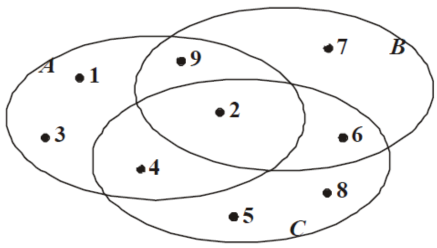
**TESTE SEU CONHECIMENTO!!**

1- No diagrama seguinte, *A*, *B* e *C* são três conjuntos não vazios. Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa:

( ........... ) $A \subset B$
( ........... ) $C \subset B$
( ........... ) $B \subset A$
( ........... ) $A \subset C$)
( ........... ) $B \not\subset A$
( ........... ) $A \not\subset C$
( ........... ) $B \supset \mathrm{A}$




2 - Considere o seguinte diagrama:




Determine:
a) $A \cup B$ = {.......................................................................................... }
b) $A \cup C$ = {........................................................................................ }
c) $B \cup C$ = {.......................................................................................... }
d) $A \cup B \cup C$ = { ......................................................................................... }
e) $A \cap B$ = {.......................................................................................... }
f) $A \cap C$ = { ........................................................................................ }
g) $B \cap C$ = {......................................................................................... }
h) $A \cap B \cap C$ = { ........................................................................................ }
i) $A - B$ = {........................................................................................ }
j) $A - C$ = {....................................................................................... }
k) $B - C$ = { ........................................................................................ }
l) $( A - B ) - C$ = { ........................................................................................ }

## Intervalos, inequações e valor absoluto

Nesta seção apresentamos a comparação de números reais, ou seja, a identificação de quando um número real é maior ou menor que outro. Para isso é necessário o uso de axiomas e propriedades.
Na seção anterior comentamos sobre os números positivos e negativos e agora, usando desigualdades, será possível dizer que um número *a* é **positivo** se $a>0$ e *a* é **negativo** se $a<0$.

### Intervalos

Se alguém disser para você que no próximo fim de semana as temperaturas mínima e máxima na região serão de 20°C e 35°C, como você representaria isto matematicamente?

Para este tipo de situação, usa-se o conceito de intervalos.

***Definição:*** *Intervalos são subconjuntos infinitos de números reais.*

Veja a tabela a seguir na qual estão dispostos os nove tipos de intervalos:

| Nome | Notação | Descrição de Conjunto | Representação Gráfica |
|---|---|---|---|
| Intervalo aberto | $(a,b)$ | $\{x \mid a < x < b\}$ | $a$ $b$ |
| Intervalo fechado | $[a,b]$ | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | $a$ $b$ |
| Intervalo semi-aberto ou semi-fechado | $[a,b)$ | $\{x \mid a \leq x < b\}$ | $a$ $b$ |
| | $(a,b]$ | $\{x \mid a < x \leq b\}$ | $a$ $b$ |
| Intervalos infinitos | $(a,\infty)$ | $\{x \mid x > a\}$ | $a$ |
| | $[a,\infty)$ | $\{x \mid x \geq a\}$ | $a$ |
| | $(-\infty,b)$ | $\{x \mid x < b\}$ | $b$ |
| | $(-\infty,b]$ | $\{x \mid x \leq b\}$ | $b$ |
| Números reais | $(-\infty,\infty)$ | $\mathbb{R}$ | |

A comparação de números reais é feita através de quatro tipos de desigualdades, são elas:

| | | |
|---|---|---|
| $x < y$ | $x$ é menor que $y$ | Exemplo: $2 < 3$ |
| $x \leq y$ | $x$ é menor ou igual a $y$ | Exemplo: $2 \leq 3$ ou $2 \leq 2$ |
| $x > y$ | $x$ é maior que $y$ | Exemplo: $3 > 2$ |
| $x \geq y$ | $x$ é maior ou igual a $y$ | Exemplo: $3 \geq 2$ ou $3 \geq 3$ |

## Inequações

Inequação é uma expressão matemática que possui a propriedade de expressar desigualdades, diferente da equação que expressa igualdade.
Os passos para resolver uma inequação são semelhantes aos de uma equação.

**Exemplo:** Determine a solução das inequações abaixo e represente graficamente:

a) $2x-5 > 10$
b) $4x-10 < 20-2x$
c) $4 < 2x-4 < 10$

## TESTE SEU CONHECIMENTO!!

1- Represente graficamente o conjunto solução das inequações abaixo:
a) $1 \leq 4x-7 \leq 13$

b) $2x + 7 > 1$

## Propriedade das Desigualdades

Sejam *a, b, c* e *d* números reais.

**a)** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;

**b)** Se $a < b$, então $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$;

**c)** Se $a < b$, então $ac < bc$ se $c > 0$ e $ac > bc$ se $c < 0$;

**d)** Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

**e)** Se $a$ e $b$ são ambos positivos ou negativos e $a < b$, então $1/a > 1/b$

## Valor Absoluto

Imagine que você esteja na reta real, em cima do ponto –3, e precisa determinar qual a distância de –3 até 0? Rapidamente responde-se que a distância é 3.

Essa idéia de distância recebe o nome de valor absoluto.

***Definição:*** *O valor absoluto de a, denotado por | a |, é definido como:*

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$