INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Mossoró

Matemática Licenciatura - Semestre 2010.1
Curso: Cálculo Diferencial e Integral I
Professor: Robson Sousa

Limite e Continuidade

Neste capítulo apresentaremos as idéias básicas sobre limites e continuidade de uma função real.

Limites

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $2x + 1$, isto é, $f(x) = 2x + 1$. O gráfico de f é uma reta que intercepta o eixo dos y no ponto $(0, 1)$ e intercepta o eixo dos x no ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$ (confira Figura 1).

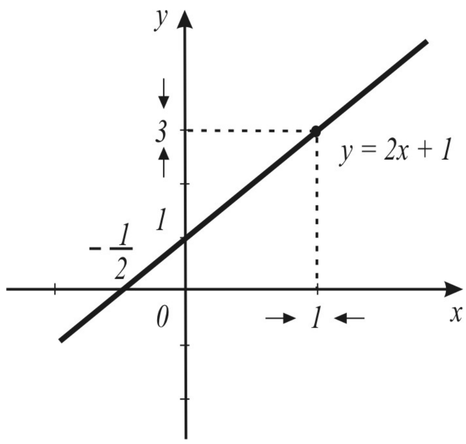


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Vamos considerar as tabelas

x	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x)$	2	$2,8$	$2,98$	$2,998$	$2,9998$

e

x	$1,5$	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$f(x)$	4	$3,2$	$3,02$	$3,002$	$3,0002$

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 1, notação $x \to 1$, tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ se aproxima de 3. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao limite 3 quando x se aproxima de 1, neste caso usamos a seguinte simbologia:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Mais geralmente, temos a seguinte definição.

Definição 0.1 *Seja f uma função qualquer. Se f aproxima-se de uma constante L, quando x se aproxima de um número x_0 tanto pela esquerda quanto pela direita, dizemos que f tende ao limite L. Neste caso, escreveremos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

O número real L é chamado de limite *de f no ponto x_0 (confira Figura abaixo). A notação $x \to x_0$ significa que x está muito próximo de x_0 mas $x \neq x_0$.*

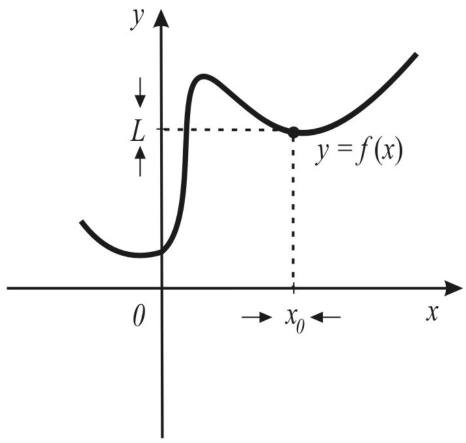


Figura 2: Representação gráfica de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Exemplo 0.2 *Se $f(x) = c$ é a função constante, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c.$$

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 3 abaixo), temos que o limite de f é igual a c, em qualquer ponto x_0, pois a medida que nos aproximamos tanto pela esquerda, quanto pela direita de qualquer ponto x_0, $f(x)$ se aproxima de c.

■

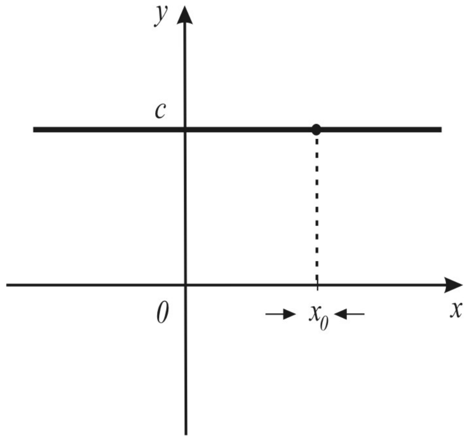


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = c$.

Exemplo 0.3 *Se $f(x) = x$ é a função identidade, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0.$$

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 4),

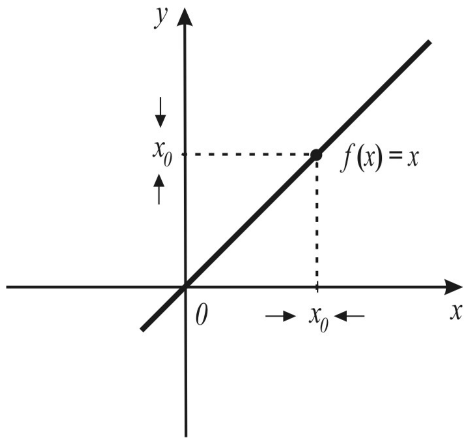


Figura 4: Gráfico função $f(x) = x$.

temos que o limite de f é igual a x_0, em qualquer ponto x_0, pois a medida que nos aproximamos tanto pela esquerda, quanto pela direita de qualquer ponto x_0, $f(x)$ se aproxima de c. ■

Exemplo 0.4 *Se f é a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x \leq 1, \\ -x & se\ x > 1, \end{cases}$$

então $\lim_{x \to 1} f(x)$ *não existe.*

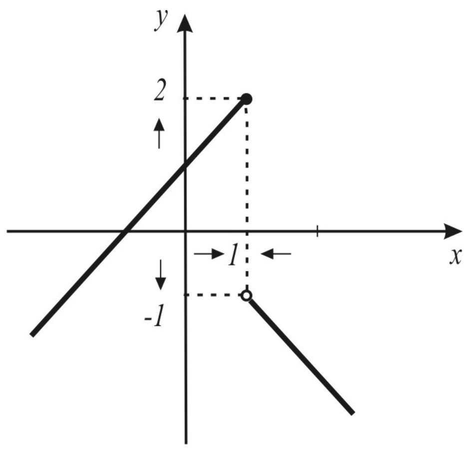


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1, \\ -x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 5),
temos que o limite de f é igual a -1 quando x se aproxima de 1 pela direita e é igual a 2 quando x se aproxima de 1 pela esquerda. Assim, o limite de f não existe no ponto $x_0 = 1$, pois ele depende de como x se aproxima de $x_0 = 1$. ■

Propriedade 0.5 (Propriedades do limite de uma função) *Sejam f, g funções quaisquer e c uma constante. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, então:*

1. $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = L + M$;
2. $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = L - M$;
3. $\lim_{x\to x_0}(cf)(x) = cL$;
4. $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = LM$;
5. $\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{M}$, *com* $M \neq 0$;
6. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$;
7. $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = L^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ *e* $L \neq 0$;

Exemplo 0.6 *Calcular o limite* $\lim_{x\to x_0}(ax+b)$.

Solução. Pelos Exemplos acima e as Propriedades 1 e 3, temos que

$$\lim_{x\to x_0}(ax+b) = \lim_{x\to x_0}(ax) + \lim_{x\to x_0} b = a \lim_{x\to x_0} x + b = ax_0 + b.$$

■

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to x_0}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0.$$

Exemplo 0.7 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x+1}{3x+2}.$$

Solução. Pelas Propriedades e o Exemplo anterior, temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x+1}{3x+2} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+x+1)}{\lim_{x\to 1}(3x+2)} = \frac{4}{5}.$$

■

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0} = \frac{a_n x_0^n+\cdots+a_1x_0+a_0}{b_m x_0^m+\cdots+b_1x_0+b_0}$$

se $b_m x_0^m+\cdots+b_1x_0+b_0 \neq 0$.

Exemplo 0.8 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)} = \frac{0}{0},$$

o que é uma "*forma indeterminada.*" Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Como

$$x^2-4=(x-2)(x+2) \text{ e } x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

temos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}(x-1)} = \frac{4}{1} = 4,$$

pois $x \to 2$ significa que $(x-2) \neq 0$. Note que, esse exemplo mostra que, para uma função ter limite L quando x tende x_0, não é necessário que seja definida em x_0. ■

Exemplo 0.9 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3-1)}{\lim_{x\to 1}(x-1)} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^3-1}{x-1}.$$

Como

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

temos que

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=1+1+1=3,$$

pois $x\to1$ significa que $(x-1)\neq0$. ■

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=n.$$

Exemplo 0.10 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x}-1)}{\lim_{x\to1}(x-1)}=\frac{\sqrt[3]{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}.$$

Como

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

fazendo $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=1$, que

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3=x-1=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1),\ \text{ ou ainda, }\ \sqrt[3]{x}-1=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\\&=\frac{1}{\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

pois $x\to1$ significa que $(x-1)\neq0$. ■

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n}.$$

Observação 0.11 *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *não existe.*

Exemplo 0.12 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

não existe.

Solução. Como

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3 \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$$

temos, pela Observação anterior, que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

não existe. ■

Exemplo 0.13 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$$

não existe.

Solução. Como

$$\lim_{x\to 1}(x+3) = 4 \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$$

temos, pelo Observação, que

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$$

não existe. ■

Definição Formal de Limite

Formalmente, dizemos que
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$
se dado um número real $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe em correspondência um $\delta > 0$ tal que
$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

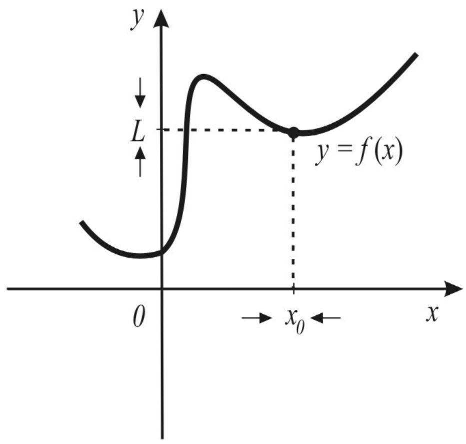


Figura 6: Representação gráfica de $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Uma vez que $|x - x_0|$ é a distância de x a x_0 e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser escrita em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *significa que a distância entre* $f(x)$ *e* L *fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de* x *a* a *suficientemente pequena (mais não 0). Ou ainda,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *significa que os valores de* $f(x)$ *podem ser tornados tão próximos de* L *quanto desejarmos, tomando-se* x *suficientemente próximo de* a *(mas não igual a* a*).*

Exemplo 0.14 *Mostrar, usando a* definição formal de limite*, que*
$$\lim_{x\to 2}(2x - 3) = 1$$

Solução. Devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que
$$x \in \mathbb{R},\ \ 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(2x - 3) - 1| < \varepsilon.$$

Na resolução deste tipo de desigualdade podemos, em geral, obter $\delta > 0$ desenvolvendo a afirmação envolvendo ε. De fato,
$$|(2x - 3) - 1| = |2x - 4| = 2\,|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-3)-1| < \varepsilon,$$

pois

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2\,|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |(2x-3)-1| = 2\,|x-2| < \varepsilon.$$

■

Limites Laterais

Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 0, \\ x+1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O gráfico de f é mostrado na Figura 7.

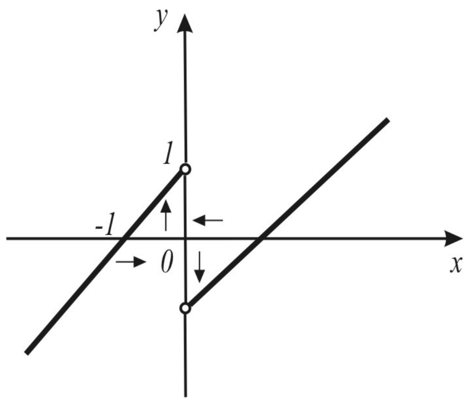


Figura 7: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 0, \\ x+1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Vamos considerar as tabelas

x	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$f(x)$	$-0,5$	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$	$-0,9999$

e

x	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$f(x)$	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 0 pela esquerda, *notação* $x \to 0^-$, $f(x)$ se aproxima de 1 e quando x se aproxima de 0 pela direita, *notação* $x \to 0^+$, $f(x)$ se aproxima de -1. Logo,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \;\text{ e }\; \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1.$$

As notações

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

significa que: f aproxima-se do limite L, quando x se aproxima pela esquerda e pela direita de x_0 respectivamente. O número real L é chamado de *limite lateral* à esquerda (ou a direita) de f (confira Figura 8).

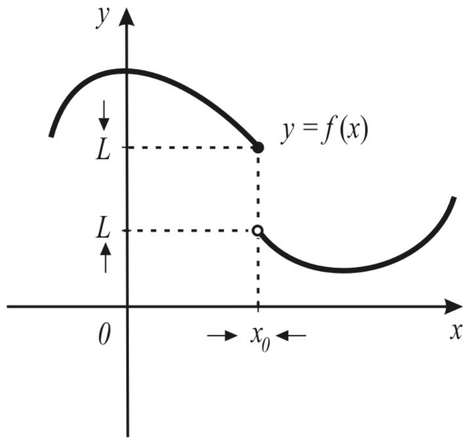


Figura 8: Gráfico da função f.

Observação 0.15 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se,*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L,$$

ou seja, o limite de uma função em um ponto só existe, se os limites laterais existirem e forem iguais. Essa observação garante que todas as propriedades de limite continuam válidas para limites laterais.

Exemplo 0.16 *Seja f a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 5x+5 & se\ x \leq -1, \\ \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} & se\ x > -1. \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

Solução. Como $x \to -1^-$ significa que $x < -1$, logo $f(x) = 5x+5$ e, pelas propriedades de limites (que, pela Observação anterior, continuam válidas para limites laterais), obtemos

$$\lim_{x\to -1^-} (5x+5) = 5(-1)+5 = 0.$$

Como $x \to -1^+$ significa que $x > -1$, temos que

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}.$$

Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \frac{\lim_{x\to -1^+}(x^2-1)}{\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x+3)} = \frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}.$$

Como

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) \text{ e } x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$$

temos que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+3} = -1.$$

Note que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

Portanto, $\lim_{x\to -1} f(x)$ não existe. ■

Exemplo 0.17 *Seja f uma função definida por*

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Determine se possível, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solução. A função f não é definida em $x = 0$, pois $f(x) = \frac{|0|}{0} = \frac{0}{0}$ o que é uma indeterminação. Observe que $x \to 0^+$, então $x > 0$, logo $|x| = x$ e assim, $f(x) = \frac{x}{x} = 1$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Por outro lado, $x \to 0^-$, então $x < 0$, logo $|x| = -x$ e assim $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Deste modo,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0} f(x)$, temos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. ■

Exemplo 0.18 *Seja f uma função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{se} \quad x<1 \\ 4 & \text{se} \quad x=1 \\ x^2+1 & \text{se} \quad x>1 \end{cases}.$$

Determine se possível, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solução. Se $x \to 1^-$ então $x < 1$, assim $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3-x) = 2$. Por outro lado, se $x \to 1^+$ então $x > 1$, assim $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. ■

Seja $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}.$$

O gráfico de f é mostrado na Figura 9.

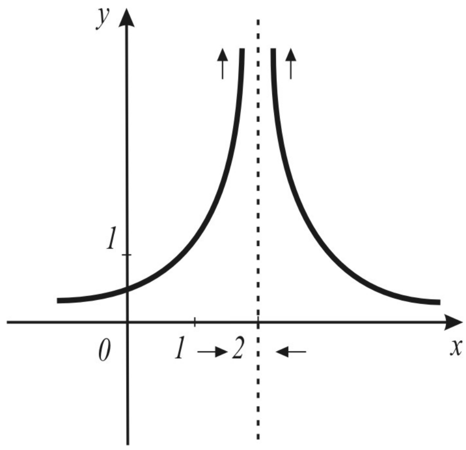


Figura 9: Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$.

Vamos considerar as tabelas

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{10}$
$f(x)$	3	12	27	48	300

e

x	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{21}{10}$
$f(x)$	3	12	27	48	300

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 2 tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ cresce sem limite. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao infinito $(+\infty)$ quando x se aproxima de 2, em símbolos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

A notação

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

significa que: f cresce sem limite ou decresce sem limite respectivamente quando x se aproxima de x_0. Neste caso, dizemos que f tem *limite infinito* ou, equivalentemente, o limite de f quando x se aproxima de x_0 não existe.

Exemplo 0.19 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty.$$

Solução. Pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$ (confira Figura 10), temos que o limite de f tende ao infinito no ponto $x_0 = 1$. Pois a medida que x se aproxima de 1 tanto pela esquerda quanto pela direita $f(x)$ cresce sem limite.

■

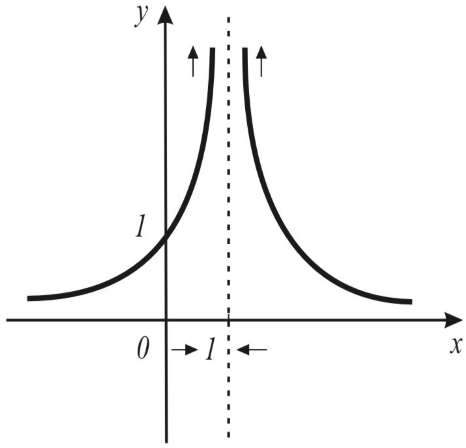


Figura 10: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$.

Exemplo 0.20 *Encontre* $\lim\limits_{x\to\infty} x^3$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$.

Solução. Quando x torna-se muito grande x^3 também fica muito grande. Por exemplo:

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1000000 \qquad 1000^3 = 1000000000.$$

Na realidade, podemos fazer x^3 tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto podemos escrever

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

Analogamente, quando x é muito grande (em módulo), porém negativo, x^3 também o é. Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

■

Definição 0.21 *A reta* $x = x_0$ *é uma* assíntota vertical *do gráfico de* f *se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:*

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$.

Observação 0.22 *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, *isto é, o limite não existe.*

Geralmente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x\to+\infty} x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}) \\ &= \pm\infty,\end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n+\frac{a_{n-1}}{x^n}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n})=a_n \text{ e } \lim_{x\to+\infty}x^n=\infty$$

onde $a_n>0$ ou $a_n<0$. Se $n\in\mathbb{N}$ é ímpar, então

$$\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=\pm\infty$$

Exemplo 0.23 *Encontre* $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x)$.

Solução. Seria errado escrever $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to-\infty}x^2-\lim_{x\to-\infty}x=\infty-\infty$. As propriedades de limite não podem ser aplicadas para limites infinitos, pois ∞ não é um número (não podemos definir $\infty-\infty$). Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\,(x-1)=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\left(\lim_{x\to-\infty}(x-1)\right)=\infty,$$

pois, como $\lim_{x\to-\infty}x$ e $\lim_{x\to-\infty}(x-1)$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto. ■

Agora, seja $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\frac{1}{x^2}.$$

O gráfico de $f(x)$ é mostrado na Figura 11.

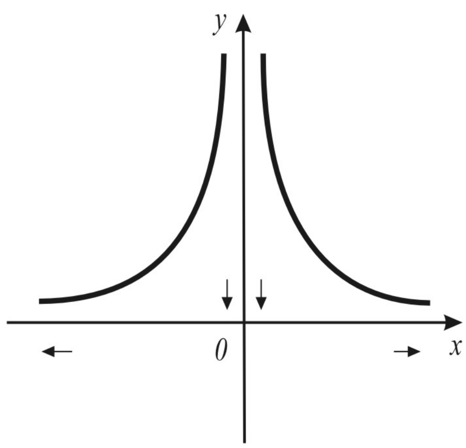


Figura 11: Gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Vamos considerar as tabelas

x	10	100	1.000	10.000	100.000
$f(x)$	10^{-2}	10^{-4}	10^{-9}	10^{-16}	10^{-25}

e

x	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000
$f(x)$	10^{-2}	10^{-4}	10^{-9}	10^{-16}	10^{-25}

Pelas tabelas, notamos que, quando x cresce sem limite tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ se aproxima de 0. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao limite 0 quando x cresce (decresce) sem limite, em símbolos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

A notação

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty}f(x)=L$$

significa que: $f(x)$ tem limite L quando x cresce sem limite ou decresce sem limite respectivamente. Neste caso, dizemos que f tem *limite no infinito.*

Definição 0.24 *A reta $y = L$ é uma* assíntota horizontal *do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:*

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$;
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Observação 0.25 *Sejam $K \in \mathbb{R}^*$ e $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{K}{x^r}=0 \ \textit{e} \ \lim_{x\to-\infty}\frac{K}{x^r}=0.$$

Podemos, também, considerar o caso em que tanto x como $f(x)$ cresça ou decresça sem limite. Neste caso, denotaremos por

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x) &= +\infty \ \textit{ou} \ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\\ \lim_{x\to-\infty}f(x) &= +\infty \ \textit{ou} \ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.\end{aligned}$$

Além disso, se $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L$, $L \neq 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.x^n = -\infty$.

Exemplo 0.26 *Calcule*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$$

Solução. Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. Nesse caso a maior potência de x no denominador e x^2. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{3-0-0}{5-0-0}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

De modo similar, temos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\frac{3}{5}$. ■

Geralmente,

$$\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to+\infty}(a_n+\frac{a_{n-1}}{x^n}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n})=a_n$$

onde $a_n > 0$ ou $a_n < 0$.

Exemplo 0.27 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+5x-3}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+5x-3}=\frac{\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x+1)}{\lim_{x\to+\infty}(2x^2+5x-3)}=\frac{\infty}{\infty},$$

o que é uma indeterminação. Pela observação anterior, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+5x-3} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x^2}}{\frac{2x^2+5x-3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{(2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})}\\ &= \frac{\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})}=\frac{1-0+0}{2+0-0}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 0.28 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}.$$

Solução. Como a maior potência de x no denominador é o proprio x, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2-4x+3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-4+\frac{3}{x}}=0.$$

De modo similar, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}=0.$$

■

Exemplo 0.29 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Solução.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2})}}{1+\frac{1}{x}}\\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1\end{aligned}$$

■

Teorema 0.30 (Teorema do Confronto, do sanduíche ou do imprensamento) *Suponhamos que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente para o proprio a.

$$Se \lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x) \text{ então } \lim_{x \to a} = L.$$

Prova. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em textos mais avançados.

Exemplo 0.31 *Sabendo que* $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ *não existe, mostre que* $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$

Solução. Observe inicialmente que não podemos usar $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \left(\lim\limits_{x \to 0} x^2\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ por que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ não existe.No entanto, sabemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1,$$

assim, multiplicando a última desigualdade por x^2, obtemos

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Por outro lado, como $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2) = 0$, concluimos pelo teorema do confronto que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$ ∎

Continuidade

Vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2, \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Note que:

1. $f(2) = 4$, isto é, f é definida no ponto $x_0 = 2$;
2. $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$, isto é, $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Definição 0.32 *Sejam f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Dizemos que f é* contínua em x_0 *se as seguintes condições são satisfeitas*:

1. $f(x_0)$ existe, isto é, f está definida no ponto x_0;

2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe, isto é,* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *é um número real*;

3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observação 0.33 *Sejam* f *uma função e* $x_0 \in X = \operatorname{Dom} f$ *um intervalo aberto*:

1. *Se* f *é contínua em* x_0*, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

2. *Dizemos que* f *é* contínua *em* X *se* f *é continua em todos os pontos de* X*. Intuitivamente,* f *é contínua em* X *se o gráfico de* f *pode ser traçado, completamente, sem tirarmos o lápis do papel.*

Se pelo menos uma das condições da definição de função contínua f em x_0 não for satisfeita, dizemos que f é *descontínua* em x_0. Neste caso, temos os seguintes tipos descontinuidade:

1. O ponto x_0 é uma *descontinuidade removível* de f se $f(x_0)$ não está definido e $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existir ou
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$
Porque podemos removê-la definindo adequadamente o valor $f(x_0)$.

2. O ponto x_0 é uma *descontinuidade tipo salto* de f se os limites laterais existirem e são diferentes, isto é,
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

3. O ponto x_0 é uma *descontinuidade essencial* de f se
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Exemplo 0.34 *Determinar se a função*

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

é contínua em $x_0 = 2$*. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.*

Solução. Neste tipo de problema, devemos primeiro encontrar o domínio da função f. É fácil verificar que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$. Como $x_0 = 2 \in \operatorname{Dom} f$, podemos falar da continuidade ou não de f em $x_0 = 2$.

$$f(2) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15,$$

isto é, f está definida no ponto $x_0 = 2$;

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15,$$

isto é, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe;

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 15 = f(2).$$

Portanto, f é contínua em $x_0 = 2$. ■

Exemplo 0.35 *Determinar se a função*

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

é contínua em $x_0 = 2$. *Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.*

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$. Como $x_0 = 2 \notin \operatorname{Dom} f$ temos que f é descontínua em $x_0 = 2$, isto é, f não está definida no ponto $x_0 = 2$ (confira Figura 12).

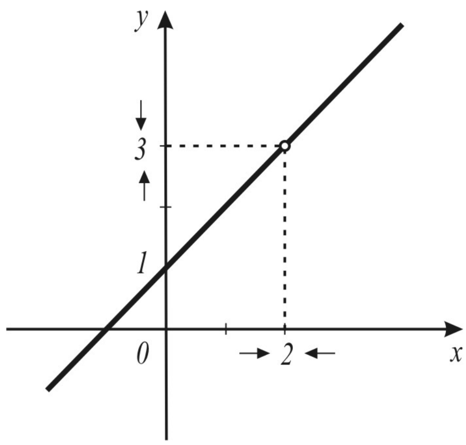


Figura 12: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$.

Neste caso, devemos dizer o tipo de descontinuidade de f.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 1) = 3.$$

Assim, $x_0 = 2$ é uma descontinuidade removível de f, pois f não está definida no ponto $x_0 = 2$, no entanto, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe. Note que, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2, \\ 3 & \text{se } x = 2, \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 2$. ■

Exemplo 0.36 *Determinar se a função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & se\ x \neq 1, \\ 2 & se\ x = 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. *Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.*

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Como $x_0 = 1 \in \operatorname{Dom} f$ temos que f está definida no ponto $x_0 = 1$, isto é, $f(1) = 2$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3.$$

Como $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ temos que f é descontínua em $x_0 = 1$ (confira Figura 13).

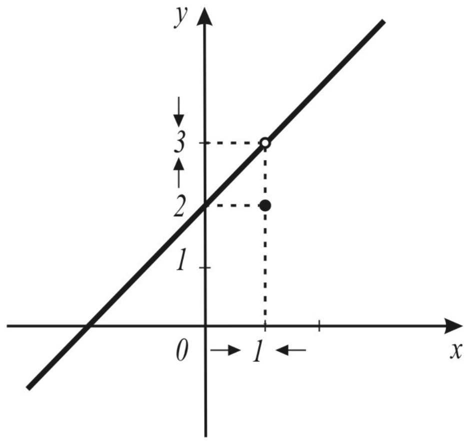


Figura 13: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Assim, $x_0 = 1$ é uma descontinuidade removível de f, pois, apesar de f estar definida no ponto $x_0 = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. Note que, função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1, \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. ■

Exemplo 0.37 *Determinar se a função*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \textit{se } x < 1, \\ -x + 2 & \textit{se } x \geq 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

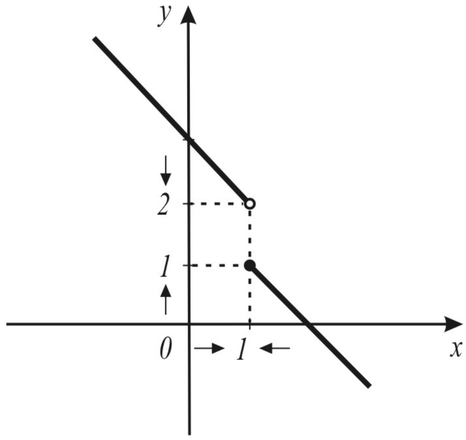
Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Como $x_0 = 1 \in \operatorname{Dom} f$ temos que f está definida no ponto $x_0 = 1$, isto é, $f(1) = 1$. Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x + 3) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x + 2) = 1$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ temos que $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe e, assim, f é descontínua em $x_0 = 1$ (confira Figura). Portanto, $x_0 = 1$ é uma descontinuidade tipo salto de f, pois, $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$.



■

Exemplo 0.38 *Determinar se a função*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

é contínua em $x_0 = 0$*. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.*

Solução. É claro que $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. Como $x_0 = 0 \notin \text{Dom}\, f$ temos que f é descontínua em $x_0 = 0$, isto é, f não está definida no ponto $x_0 = 0$. Note que,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Portanto, $x_0 = 0$ é uma descontinuidade essencial de f. ■

Propriedade 0.39 *Sejam* $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções. Se* f *e* g *são contínuas em* $x_0 \in X$*, então:*

1. $f + g$ *é contínua em* $x_0 \in X$;
2. $f - g$ *é contínua em* $x_0 \in X$;
3. cf*, onde* c *é uma constante, é contínua em* $x_0 \in X$;
4. fg *é contínua em* $x_0 \in X$;
5. $\frac{f}{g}$*, com* $g(x_0) \neq 0$*, é contínua em* $x_0 \in X$;
6. $|f|$ *é contínua em* $x_0 \in X$.

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Como f e g são contínuas em $x_0 \in X$ temos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ \text{ e } \ \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Logo, pela Propriedade 1 de limites, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0). \end{aligned}$$

Portanto, $f + g$ é contínua em $x_0 \in X$. ■

Teorema 0.40 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções, com $\operatorname{Im} f \subseteq Y$. Se f é contínua em $x_0 \in X$ e g é contínua em $y_0 = f(x_0) \in Y$, então $g \circ f$ é contínua em $x_0 \in X$.*

Prova. Como f e g são contínuas em x_0 e y_0, respectivamente, temos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ \text{ e } \ \lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0)).$$

Assim,

$$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0).$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em $x_0 \in X$. ■

Note que, se $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então f é contínua em todo $\mathbb{R}$. Também, se

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

então f é contínua em todo $\mathbb{R}$, onde

$$b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0.$$

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $[a, b]$ se f é contínua em $]a, b[$ e

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \ \text{ e } \ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Exemplo 0.41 *Mostrar que a função $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ é contínua.*

Solução. Observe que para todo $-3 < a < 3$ (ou seja, $a \in \,]a, b[$) temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-a^2} = f(a),$$

logo para todo $a \in \,]a, b[$ a função f é contínua. Além disso,

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{(9-x^2)} = 0 = f(-3) \ \text{ e } \ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{(9-x^2)} = 0 = f(3).$$

Assim, f é contínua em $[-3, 3]$. ■

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Mossoró

Matemática Licenciatura - Semestre 2010.1
Curso: Cálculo Diferencial e Integral I
Professor: Robson Sousa

1^a Lista de Exercícios

1. Determinar, se existir, os limites abaixo:

   - (a_1) $\lim\limits_{x\to 100} 25$
   - (a_2) $\lim\limits_{x\to -5} x$
   - (a_3) $\lim\limits_{x\to 3} 2x+3$
   - (a) $\lim\limits_{x\to 4}(5x^2-9x-8)$
   - (b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7}$
   - (c) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$
   - (d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x+6}{x-2}$
   - (e) $\lim\limits_{x\to -3} \left|\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right|$
   - (f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x^6-64}$
   - (g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
   - (h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$
   - (i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$
   - (j) $\lim\limits_{t\to 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$
   - (k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$
   - (l) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$
   - (m) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
   - (n) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$
   - (o) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$
   - (p) $\lim\limits_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
   - (q) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$
   - (r) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$
   - (s) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{2x}}{3}$
   - (t) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}$
   - (u) $\lim\limits_{t\to 8}(1+\sqrt[3]{x})\,(2-6x^2+x^3)$
   - (v) $\lim\limits_{t\to -1}(t+1)^3\,(t+3)^5$
   - (x) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t})^3$
   - (z) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

2. Sabendo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-2$ e $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=0$, determine os seguintes limites:

   - (a) $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+5g(x)]$
   - (b) $\lim\limits_{x\to 2}[g(x)]^3$
   - (c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$
   - (d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)}$
   - (e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$
   - (f) $\lim\limits_{x\to 2}[h(x)+f(x)]$

3. Determinar, se existir, os seguintes limites laterias:

   - (a) $\lim\limits_{x\to 5^+}(\sqrt{x^2-25}+3)$
   - (b) $\lim\limits_{x\to 3^-} x\sqrt{9-x^2}$
   - (c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$
   - (d) $\lim\limits_{x\to -10^-}\frac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2}}$
   - (e) $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3}$
   - (f) $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{\sqrt[4]{x^2-16}}{x+4}$
   - (g) $\lim\limits_{x\to 16^+}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
   - (h) $\lim\limits_{x\to 7^-}\sqrt{7-x}$
   - (i) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{8-x^3}$
   - (j) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt[3]{x^3-1}$
   - (k) $\lim\limits_{x\to -8} x^{\frac{2}{3}}$
   - (l) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+}(5+|6x-3|)$.

4. Em cada alternativa determine os seguintes limites, caso existam:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x),\quad \lim_{x\to 1^+} f(x),\quad \lim_{x\to 1} f(x)$$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1, \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 1, \\ 2 & \text{se } x = 1, \\ x - 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \geq -1, \\ x + c^2 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to -1} f(x)$ exista.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{se } x < 1, \\ c & \text{se } x = 1, \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - c & \text{se } x \geq 2, \\ x^2 + cx - 5 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} d - 2x & \text{se } x \geq 2, \\ cx^2 + d & \text{se } -2 < x < 2, \\ x - c & \text{se } x \leq -2. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d de modo que o limite de $f(x)$ exista em todo $\mathbb{R}$.

9. Determinar, se existir, os seguintes limites no infinito:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^4+x+2}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+x^2}{x+3}$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(x+2)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-x+1}{6x^3+2x^2-7}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - 10x)$.

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2})$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{5x+3}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^2-1}}$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

10. Determinar, se existir, os seguintes limites infinitos:

$(a)\ \lim\limits_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$	$(f)\ \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{5}{x-4}$	$(k)\ \lim\limits_{x\to -1} \frac{-1}{(x+1)^2}$
$(b)\ \lim\limits_{x\to 5^-} \frac{6}{x-5}$	$(g)\ \lim\limits_{x\to 4} \frac{5}{x-4}$	$(l)\ \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2}{x^2-x-2}$
$(c)\ \lim\limits_{x\to 5} \frac{6}{x-5}$	$(h)\ \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{-1}{(x+1)^2}$	$(m)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-x}$
$(d)\ \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{5}{x-4}$	$(i)\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$	$(n)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

11. Mostrar que as seguintes funções são contínuas no ponto indicado:

$(a)\ f(x) = \sqrt{2x-5} + 3x,\ x_0 = 4$	$(c)\ f(x) = 3x^2 + 7 - \frac{1}{\sqrt{-x}},\ x_0 = -2$
$(b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2+2},\ x_0 = -5$	$(d)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x+1},\ x_0 = 8$

12. Determinar se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

13. Determinar se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

14. Determinar se a função

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

15. Determinar se a função

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} |x + 3| & \text{se } x \neq -2 \\ 2 & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 2$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

16. Determinar se a função

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 2$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

17. Determinar se cada função é contínua ou descontínua em cada intervalo:

    (a) $f(x) = \sqrt{x-4}$, em $[4, 8]$;

    (b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, em $]1, 4[$;

    (c) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, em $[-1, 1]$;

18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ c & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

    Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \geq -1, \\ x + c^2 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

    Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.